Wong-Zakai approximations for reflecting SDE (Symposium on Probability Theory)

AUTHOR(S):
会田, 茂樹

CITATION:
会田, 茂樹. Wong-Zakai approximations for reflecting SDE (Symposium on Probability Theory). 数理解析研究所講究録 2014, 1903: 1-5: KJ00009363079.

ISSUE DATE:
2014-07

URL:
http://hdl.handle.net/2433/223075

数理解析研究所講究録
第 1903 巻 2014 年 1-5

Wong-Zakai approximations for reflecting SDE

会田 茂樹 (東北大学 大学院理学研究科 数学専攻)
Shigeki Aida (Mathematical Institute, Tohoku University)

2013 年夏の研究会 "確率解析とその周辺" で必ずしも滑らかでない境界を持つ領域 D で定義された反射壁確率微分方程式の Wong-Zakai 近似解が確率 1 で真の解に一様収束の位相で収束するという講演者と佐々木孝介氏の共著論文 [3] の結果について講演した。ここでは、(1) 凸領域の場合、そこで課されていた条件 (B) が無くても収束すること、(2) 一般の領域で条件 (C) が無くてもやはり収束すること (ただし収束のオーダーは不明) について、[2] に基づいて説明したい。反射壁の無い通常の SDE の Wong-Zakai 近似の収束は、現在では rough path 解析で明快に説明できる。従って、現時点で, Wong-Zakai 近似を論ずるからには、rough path 解析の視点から研究がなされるべきであろう。実際、反射壁 SDE の Wong-Zakai 近似を研究し始めた当初から driving path (rough path) に関する連続性定理を確立することを念頭においていた。残念ながらまだ連続性定理が成立するかどうかわからないが、連続な p-variation path $(1 \leq p < 2)$ を driving path とする反射壁 ODE, および p-rough path $(2 \leq p < 3)$ でドライヴされた "reflecting rough differential equation" (これは講演者が勝手にそう読んでいるので、一般的な用語では無い) は自然に定義でき、その解の存在と評価を得ることができたので、そのことについて説明したい。まず、$\mathbb{R}^d$ 内の領域 D について $x \in \partial D$ における内向き単位法線ベクトルの集合の定義を思い出そう。

$$\mathcal{N}_x = \cup_{r>0}\mathcal{N}_{x,r} \tag{1}$$

$$\mathcal{N}_{x,r} = \left\{\boldsymbol{n} \in \mathbb{R}^d \mid |\boldsymbol{n}| = 1, B(x - r\boldsymbol{n}, r) \cap D = \emptyset\right\}, \tag{2}$$

ここで、$B(z,r) = \{y \in \mathbb{R}^d \mid |y-z| < r\}$, $z \in \mathbb{R}^d$, $r > 0$. 反射壁 SDE の強い解の存在、一意性の研究では、D に対して、次のような条件を考える事が多い (田中洋 [27]、税所康正 [24]、Lions-Sznitman [17] らの研究による)。

Definition 1. (A) $r_0 > 0$ が存在して、任意の $x \in \partial D$ に対して

$$\mathcal{N}_x = \mathcal{N}_{x,r_0} \neq \emptyset. \tag{3}$$

(B) 定数 $\delta > 0,\ \beta \geq 1$ が存在し、任意の $x \in \partial D$ に対して 単位ベクトル l_x が存在し

$$\text{任意の } \boldsymbol{n} \in \cup_{y \in B(x,\delta)\cap\partial D}\mathcal{N}_y \text{ に対して} \qquad (l_x, \boldsymbol{n}) \geq \frac{1}{\beta}. \tag{4}$$

(C) $\mathbb{R}^d$ 上の C_b^2 関数 f および $\gamma > 0$ が存在し、任意の $x \in \partial D,\ y \in \bar{D},\ \boldsymbol{n} \in \mathcal{N}_x$ に対して

$$(y - x, \boldsymbol{n}) + \frac{1}{\gamma}\left((Df)(x), \boldsymbol{n}\right)|y - x|^2 \geq 0. \tag{5}$$

$(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)$ を filtration 付き確率空間とする。$B(t)$ を $\mathbb{R}^n$ 上の $\mathcal{F}_t$-ブラウン運動とする。$\sigma \in C_b^2(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^d)$, $b \in C_b^1(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d)$ とし、$\bar{D} \subset \mathbb{R}^d$ 上の反射壁 Stratonovich SDE

$$Y(t) = y_0 + \int_0^t \sigma(Y(s)) \circ dB(s) + \int_0^t b(Y(s))ds + \Phi(t), \quad y_0 \in \bar{D}\ ; \quad 0 \le t \le T \qquad (6)$$

について D が (1) 凸 である, (2) 条件 (A), (B) が成立する、の 2 つの場合に、強い解の一意的存在が示されている ([27, 24])。$\Phi(t)$ は連続な $\mathcal{F}_t$-有界変動過程で

$$\Phi(t) = \int_0^t 1_{\partial D}(Y(s))\boldsymbol{n}(s)d\|\Phi\|_{[0,s]} \qquad (7)$$

を満たすものである。ただし, $\|\Phi\|_{[0,s]}$ は $\Phi(t)$ の $[0,s]$ における全変動を表し, $\boldsymbol{n}(s)$ は $Y(s) \in \partial D$ のとき $\boldsymbol{n}(s) \in \mathcal{N}_{Y(s)}$ となる Borel 可測写像である。これについて Wong-Zakai 近似解 Y^N を考える。

$$B^N(t) = B(t_{k-1}^N) + \frac{B(t_k^N) - B(t_{k-1}^N)}{\Delta_N}(t - t_{k-1}^N) \quad t_{k-1}^N \le t \le t_k^N$$

とする。ただし, $t_k^N = 2^{-N}kT$ $(1 \le k \le 2^N)$, $\Delta_N = 2^{-N}T$, $\Delta_k B^N = B(t_k^N) - B(t_{k-1}^N)$. Y^N は次の反射壁 ODE の解である:

$$dY^N(t) = \sigma(Y^N(t))dB^N(t) + b(Y^N(t))dt + d\Phi^N(t), \quad Y^N(0) = y_0. \qquad (8)$$

Theorem 2 ([3]). 条件 (A), (B), (C) を仮定する。任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$C_{\varepsilon,T} > 0$ が存在して、すべての N について

$$E\left[\max_{0 \le t \le T} |Y^N(t) - Y(t)|^2\right] \le C_{\varepsilon,T}\Delta_N^{(1-\varepsilon)/6}. \qquad (9)$$

Remark 3. D が有界、境界が滑らかなときは、Doss-Priouret [6] が $Y^N(t)$ は $Y(t)$ に一様収束の位相で確率収束することを示している。Evans-Stroock [8] は (A), (B), (C) および D に admissibility condition (この条件は Lions-Sznitman [17] により導入された) を仮定して, P^{Y^N} が P^Y に弱収束することを示している。また, [3] より少し後でまた [3] とは違った方法で Tusheng Zhang [29] が Evans-Stroock と同じ仮定のもとで、Theorem 2 と本質的に同じ結果を得ている。

凸領域では、条件 (A) は、任意の r_0 で成立し、(C) も明らかに $f = 0$ で成立する。また、2 次元では一般の凸領域、一般次元で有界凸領域では、条件 (B) も成立する (田中 (1978))。しかし、一般の凸領域で (B) が成立するのかは、講演者には不明である。これについては、反例があるのか、単に誰も考えていないだけなのかよくわからない。以下の結果はこの場合と、条件 (C) を落とした場合の結果である。

Theorem 4 ([2]). (1) D を凸領域とする。(9) が成立する。
(2) D は (A), (B) を満たすとする。このとき、$\max_{0 \le t \le T} |Y^N(t) - Y(t)|$ は 0 に確率収束する。

次に、$\bar{D}$ 上の reflecting rough differential equation(=RRDE) に関する結果を述べる。$X = (1, X_{s,t}^1, X_{s,t}^2)$ $(0 \le s \le t \le T)$ を $\mathbb{R}^d$ 上の p-rough path $(2 \le p < 3)$ とする。Φ_t は $\mathbb{R}^d$ 値の連続有界変動関数とし、次の rough differential equation を考える:

$$dY_t = \sigma(Y_t)dX_t + d\Phi_t, \quad Y_0 = y_0 \in \bar{D}. \tag{10}$$

正確には この方程式の driving rough path は $\int_s^t X_{s,u}^1 \otimes d\Phi_u$ などの iterated integral が定まるので、自然に (X, Φ) に付随して決まる p-rough path である. この解 $Y = (1, Y_{s,t}^1, Y_{s,t}^2)$ に対して $Y_t = y_0 + Y_{0,t}^1$ とおくと $Y_t \in \bar{D}$ $(0 \le t \le T)$ であり、

$$\Phi_t = \int_0^t 1_{\partial D}(Y_s)\boldsymbol{n}(s)d\|\Phi\|_{[0,s]}, \quad \boldsymbol{n}(s) \in \mathcal{N}_{Y_s} \text{ if } Y_s \in \partial D \quad ; \quad 0 \le t \le T \tag{11}$$

を満たす時, (Y, Φ) は X を driving rough path とする RRDE の解と言うことにする。結果を述べるために、一つ仮定を述べる。$\mathbb{R}^d$ 上の連続な path w_t $(w_0 \in \bar{D})$ が与えられた時, Skorohod 方程式 $\xi_t = w_t + \phi_t$ の解を考え (すなわち、$\xi_t \in \bar{D}$ $(0 \le t \le T)$, ϕ_t が反射を引き起こす有界変動項), 次の仮定を考える:

(H1) 正定数 C_D が存在して、任意の w について、ϕ の 任意の区間 $[s,t] \subset [0,T]$ での全変動が次の評価を持つ:

$$\|\phi\|_{[s,t]} \le C_D \max_{s \le u \le v \le t} |w_v - w_u|.$$

(H1) は例えば、凸かつ条件 (B) の仮定が $\delta = +\infty$ で成立するときに成り立つ。A.M. Davie [4] が反射壁の無い rough differential equation に対する Euler 近似による解の構成を行なっているが, その手法を用い次の定理を証明できる。

Theorem 5 ([1]). (A), (B), (H1) を仮定する。ω を $X_{s,t}$ の *control function* とする*:*

$$|X_{s,t}^i| \le \omega(s,t)^{i/p} \qquad 0 \le s \le t \le T, \quad i = 1, 2.$$

このとき、(10) の解で、次の評価をみたすものが存在する。

$$|Y_{s,t}^i| \le C(1 + \omega(0,T))^3 \omega(s,t)^{i/p} \tag{12}$$

$$\|\Phi\|_{[s,t]} \le C(1 + \omega(0,T))\omega(s,t)^{1/p}. \tag{13}$$

ただし、C は C_D, σ, p にのみ依存する定数。

$1 \le p < 2$ の時、連続な p-variation path x_t で drive された方程式を考えることもできる。このときは、D は条件 (A), (B) を満たすだけで解の存在と評価を得ることができる。$1 \le p < 2$ で D が半空間の場合は、Ferrante-Rovira [9] の研究がある。ただし、彼らの論文でも、講演者の結果でも一意性は open problem となっている。更には、p-variation path の時も、p-rough path の場合も p-rough path の空間の間の写像 $X \mapsto Y$ が Borel 可測に取れるかも、不明である。また、$2 \le p < 3$ のときは、Euler 近似の Skorohod 方程式が implicit な方程式になる。これを解くため、余分に条件 (H1) を仮定したことを注意しておく。また、[1] では, $X_{s,t}$ が Brownian rough path $B_{s,t}$ の場合の Theorem 5 の解と通常の reflecting SDE としての解との関係についても述べている。

References

[1] S. Aida, Reflecting rough differential equations, arXiv:1311.6104.

[2] S. Aida, Wong-Zakai approximation of solutions to reflecting stochastic differential equations on domains in Euclidean spaces II, arXiv:1401.2523.

[3] S. Aida and K. Sasaki, Wong-Zakai approximation of solutions to reflecting stochastic differential equations on domains in Euclidean spaces, SPA (2013) Vol. 123, 3800–3827.

[4] A.M. Davie, Differential equations driven by rough paths: an approach via discrete approximations, Appl. Math. Res. Express. AMRX 2007, no. 2, Art. ID abm009, 40 pp.

[5] A.Deya, A.Neuenkirch and S.Tindel, A Milstein-type scheme without Lévy area terms for SDEs driven by fractional Brownian motion, Ann. Inst. Henri. Poincaré Probab. Stat. 48 (2012), no.2, 518-550.

[6] H. Doss and P. Priouret, Support d'un processus de réflexion, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 61 (1982), no. 3, 327—345.

[7] P. Dupuis and H. Ishii, On Lipschitz continuity of the solution mapping to the Skorokhod problem, with applications. Stochastics Stochastics Rep. 35 (1991), no. 1, 31—62.

[8] L.C. Evans and D.W. Stroock, An approximation scheme for reflected stochastic differential equations, Stochastic Process. Appl. 121 (2011), no. 7, 1464—1491.

[9] M. Ferrante and C. Rovira, Stochastic differential equations with non-negativity constraints driven by fractional Brownian motion, J. Evol. Equ. 13 (2013), 617-632.

[10] P. Friz and H. Oberhauser, Rough path limits of the Wong-Zakai type with a modified drift term, J. Funct. Anal. 256 (2009) no.10, 3236-3256.

[11] P. Friz and S. Riedel, Convergence rates for the full Gaussian rough paths, arXiv:1108.1099.

[12] P. Friz and N. Victoir, Multidimensional Stochastic Processes as Rough Paths Theory and Applications, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 120, Cambridge University Press (2010).

[13] M. Gubinelli, Controlling rough paths. J. Funct. Anal. 216 (2004), no. 1, 86-140.

[14] I. Gyöngy and P.R. Stinga, Rate of convergence of Wong-Zakai approximations for stochastic partial differential equations, Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications VII, Progress in Probability, Vol.67, (2013), 95-130.

[15] Y. Hu and D. Nualart, Rough path analysis via fractional calculus, Trans. Amer. Math. Soc. 361 (2009), no.5, 2689-2718.

[16] N. Ikeda and S. Watanabe, Stochastic differential equations and diffusion processes. North-Holland Mathematical Library, 24. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York; Kodansha, Ltd., Tokyo, 1981.

[17] P.L. Lions and A.S. Sznitman, Stochastic differential equations with reflecting boundary conditions, Comm. Pure Appl. Math. 37 (1984), no. 4, 511—537.

[18] T. Lyons, Differential equations driven by rough signals, Rev.Mat.Iberoamer., **14** (1998), 215-310.

[19] T. Lyons and Z. Qian, System control and rough paths, (2002), Oxford Mathematical Monographs.

[20] T. Lyons, M. Caruana and T. Lévy, Differential equations driven by rough paths. Lecture Notes in Mathematics, 1908 Springer, Berlin, 2007.

[21] R. Pettersson, Wong-Zakai approximations for reflecting stochastic differential equations. Stochastic Anal.Appl. 17 (1999), no. 4, 609—617.

[22] J. Ren and S. Xu, A transfer principle for multivalued stochastic differential equations. J. Funct. Anal. 256 (2009), no. 9, 2780—2814.

[23] J.Ren and S. Xu, Support theorem for stochastic variational inequalities. Bull. Sci. Math. 134 (2010), no. 8, 826—856.

[24] Y. Saisho, Stochastic differential equations for multi-dimensional domain with reflecting boundary, Probab. Theory Related Fields 74 (1987), no. 3, 455—477.

[25] L. Słomiński, On approximation of solutions of multidimensional SDEs with reflecting boundary conditions. Stochastic Process. Appl. 50 (1994), no. 2, 197—219.

[26] L. Słomiński, Euler's approximations of solutions of SDEs with reflecting boundary. Stochastic Process. Appl. 94 (2001), no. 2, 317—337.

[27] H. Tanaka, Stochastic differential equations with reflecting boundary condition in convex regions, Hiroshima Math. J. 9 (1979), no. 1, 163—177.

[28] E. Wong and M. Zakai, On the relation between ordinary and stochastic differential equations. Internat. J. Engrg. Sci. 3 (1965) 213—229.

[29] T-S. Zhang, Strong Convergence of Wong-Zakai Approximations of Reflected SDEs in A Multidimensional General Domain, arXiv:1304.6629.